

(1) Example

Ex Show that

$$\operatorname{Ln} \frac{x+iy}{x-iy} = 2i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

sol

$$Z = x+iy = r e^{i\theta}$$

$$\bar{Z} = x-iy = r e^{-i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{Ln} \frac{x+iy}{x-iy} = \operatorname{Ln} \frac{r e^{i\theta}}{r e^{-i\theta}} = \operatorname{Ln} e^{2i\theta} = 2i\theta$$

$$= 2i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

→ Trigonometric Functions

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

[1] إيجاد علاقات جبرية بين الدوال الزائدية والمثلثية

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$\cos^2 w + \sin^2 w = 1$$

$$\cosh^2 w - \sinh^2 w = 1$$

[2] إيجاد جذور المعادلة تصوي على دوال مثلثية أو زائدية

وعدد مركب مثل.

$$\left. \begin{array}{l} \cos z \\ \sinh z \\ \sin z \\ \cosh z \\ \vdots \end{array} \right\} = a + ib$$

[3] لاستنتاج علاقة بين الدوال المثلثية العكسية والزائدية العكسية والهزور اللوغاريتمية:

$$\sin^{-1} z = i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\cos^{-1} z = i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+z}{1-iz} \right)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} z = \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

$$\cosh^{-1} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w$$

أسلوب الحل نضع الدوال المثلثية العكسية ناصية الرأس مثل

$$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w$$

مع نضع الدوال المثلثية بدلالة (e) ونعزب في e^{-iw} أو e^{-w}

مع فتتحول المعادلة إلى معادلة من الدرجة الثانية

مع فنأخذ لوغاريتم الجذور فيكون المطلوب

[3] Lec 8

[1] show that

$$|\cos z|^2 = \cos(x+iy)$$

Sol

$$\cos z = \cos(x+iy)$$

$$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \underbrace{\cos^2 x}_{(1+\sinh^2 y)} \underbrace{\cosh^2 y}_{(1-\cos^2 x)} + \sin^2 x \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sinh^2 y (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Ex2 Find all roots of $\cosh z = 5$

Sol

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$e^z + e^{-z} = 10$$

e^z بالجزء x

$$(e^z)^2 + 1 = 10 e^z$$

$$(e^z)^2 - 10 e^z + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 1 &= 0 \\ x &\rightarrow e^z \end{aligned}$$

$$\text{roots} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = e^z$$

$$z = \ln(5 \pm 4\sqrt{3})$$

Case 1

$$Z_1 = \ln 9.9$$

$$\ln(x+iy) = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$$

$$x=9.9 ; y=0 \Rightarrow r=9.9 ; \theta=0$$

$$Z_1 = \ln(9.9) \simeq \ln(9.9) + i(0 \pm 2n\pi)$$

$$Z_1 \simeq 2.29 \pm 2n\pi i$$

Case 2

$$Z_2 = \ln(0.1)$$

$$Z_2 \simeq -2.3 \pm 2n\pi i$$

Ex:3 show that

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\cosh^{-1} z = w \Rightarrow z = \cosh w$$

$$z = \frac{e^w + e^{-w}}{2} \Rightarrow e^w + e^{-w} = 2z$$

بالعز e^w *

$$(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$$

$$\underline{\text{roots}} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = e^w$$

$$w = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Complex Integration

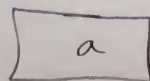
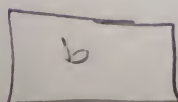
تكامل الدوال المركبة

$$I = \int_C f(z) dz$$

الهدف من دراسة تكامل الدوال المركبة هو إيجاد صور مبسطة
للتكاملات التي تساعدنا على حساب بعض التكاملات بمجرد
النظر كما أنه يمكن تحويل التكاملات التي يصعب تكاملها
بالقواعد السابقة إلى تكاملات المركبة لحسابها وإرجاعها
للصور الأولية.

يمكن بعض التحويلات المعروفة مثل (Laplace transform) أو
أخذ دوال لا يمكن إيجاد (L.T) بالقواعد العادية

فحولها إلى صور تكاملية في الأعداد المركبة لحساب بعض
التحويلات التي يصعب حسابها (L.T) وإرجاعها إلى s-domain
أو t-domain.



أنا عند a ومش عارف أكاملها هحولها عند b وأكاملها
وأرجع ثاني عند (a) انتظروا عليه باني حلقتها.

$$I = \int_C f(z) dz$$

$$Z = x + iy$$

$$dz = dx + i dy$$

$$f(z) = u + i v$$

$$I = \int_C (u + i v) (dx + i dy)$$

$$I = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

→ فيتحول التكامل لثلاثي جزأين كل جزء تكامل خطي لمدال
عادية.

← الأفكار

1] تكامل على منحني غير مغلق أو لدالة ليست (analytic)

يرمز له بالرمز $\int_C f(z) dz$ منه ده نشغلنا حلول التمرين

2] تكامل على منحني مغلق أو دالة analytic.

→ قواعد تحل بمجرد النظر.

→ يرمز له بالرمز $\oint_C f(z) dz$

③ رفق (1) [التكامل على منحنى مغلق]

← نعرف في الهورة

$$I = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

← من معادلة المنحنى C نجعل التكامل تكامل معد

بأنه نحول المتغيرات داخله إلى متغير واحد من معادلة C

① نجعل كله x ، dx

② نجعل كله y ، dy

③ الهورة البارامترية t ، dt

يعرف الهورة البارامترية

① الدائرة:

$$* (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

$$x - x_0 = a \cos t \Rightarrow x = x_0 + a \cos t$$

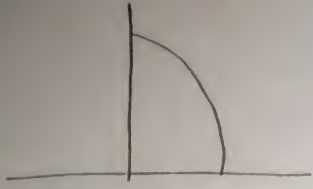
$$y - y_0 = a \sin t \Rightarrow y = y_0 + a \sin t$$

← لو جت مسألة فيها دائرة بالشكل ده فخط

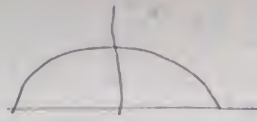
$$x - x_0 = a \cos t , y - y_0 = a \sin t$$

① Lec 8

دورات المائنه ستكون كما يلي:-



$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$



$$0 \leq t \leq \pi$$



$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = a \cos t dt$$

[2] قطع ناقص

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Let

$$* \frac{x-x_0}{a} = \cos t \quad ; \quad \frac{y-y_0}{b} = \sin t$$

$$* x = x_0 + a \cos t \quad , \quad y = y_0 + b \sin t$$

$$* dx = -a \sin t dt \quad , \quad dy = b \cos t dt$$

[3] قطع زائد :-

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow x = x_0 + a \cosh t, \quad y = y_0 + b \sinh t$$

[4] القطع الكافئ :-

$$y = ax^2$$

$$* x = t \quad , \quad y = at^2$$

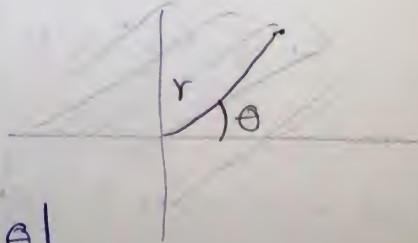
$$* dx = dt \quad , \quad dy = 2at \, dt$$

[5] إذا ~~أعطي~~ دائرة أو جزء من دائرة بالهوية المركبة
 يمكن تحويلها ~~لشكل~~ لدالتي x, y
 لكن هنا سوف لها حل آخر.

$$|z - z_0| = a$$

Notes

$$z = r e^{i\theta}$$



$$|z| = r |e^{i\theta}| = r |\cos\theta + i\sin\theta|$$

$$|z| = r$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|z - z_0| = a$$

$$z - z_0 = a e^{i\theta}$$

$$* (x - x_0) + i(y - y_0) = a \cos \theta + i a \sin \theta$$

$$* x - x_0 = a \cos \theta \quad , \quad y - y_0 = a \sin \theta$$

$$* dx = -a \sin \theta d\theta \quad , \quad dy = a \cos \theta d\theta$$



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$0 \leq \theta \leq \pi$$



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

EX: 1 Evaluate $\int_{1+i}^{2+4i} \bar{z} dz$ along

① $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 2$

② Line From From $1+i$ to $2+4i$

Sol

$$I = \int_{1+i}^{2+4i} (x-iy) (dx+idy)$$

$$= \int_{1+i}^{2+4i} (x dx + y dy) + i \int_{1+i}^{2+4i} (x dy - y dx)$$

$$\textcircled{1} y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx$$

$$I = \int_1^2 (x + 2x^3) dx + i \int_1^2 (2x^2 - x^2) dx \rightarrow *$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_1^2 + i \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2$$

=

[2]

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{y - 1}{x - 1} = \frac{3}{1}$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 2$$

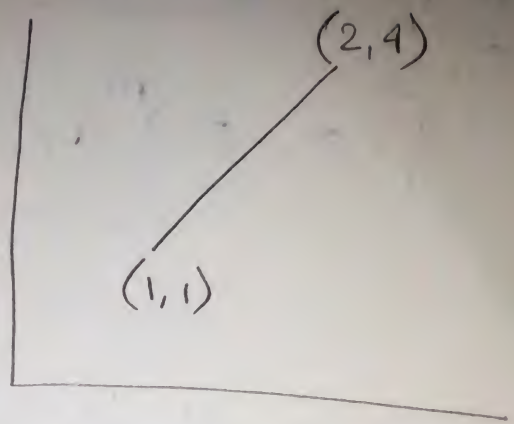
$$dy = 3 dx$$

$$1 \leq x \leq 2$$

* بالتعويض في المعادلة

$$I = \int_1^2 (x + (3x - 2)3) dx + i \int_1^2 [3x - (3x - 2)] dx$$

إذن



* Prove that

$$\int_c (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where c is $|z - z_0| = a$

Sol

$$m \neq -1$$

$$|z - z_0| = a \Rightarrow z - z_0 = a e^{i\theta}$$

$$dz = i a e^{i\theta} d\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} (a e^{i\theta})^m i a e^{i\theta} d\theta$$

$$= i a^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta} d\theta$$

$$= i a^{m+1} \left. \frac{e^{i(m+1)\theta}}{i(m+1)} \right|_0^{2\pi}$$

$$I = \frac{i a^{m+1}}{i(m+1)} \begin{bmatrix} e^{2\pi(m+1)i} & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 ; \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\sin n\pi = 0 ; \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$e^{2(m+1)\pi i} = \cos 2(m+1)\pi + i \sin 2(m+1)\pi$$

$$= (-1)^{2(m+1)} = 1$$

$$\boxed{\therefore I = 0}$$

$$\underline{m = -1}$$

$$I = \int_c \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ia e^{i\theta} d\theta}{a e^{i\theta}}$$

$$= 2\pi i$$